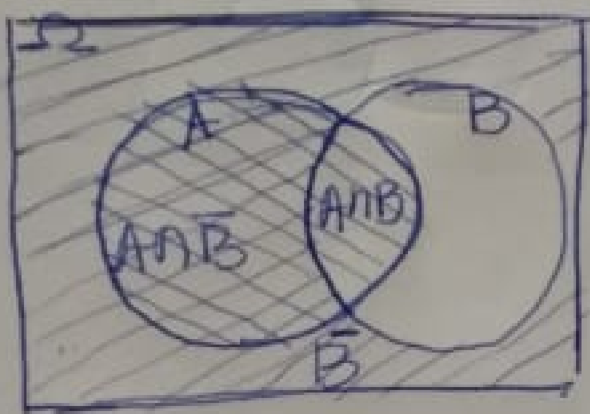
Exercice : 1



$A = (A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$

et $(A\cap B)\cap(A\cap\bar{B}) = \phi$.

Donc $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\bar{B})$.

Exercice : 2

A et B étant deux évènements quelconques :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,5$.

Deux cas possibles :

1er cas : $A\cap B = \phi$.

$P(A\cap B) = 0$ donc $P(A\cup B) = P(A) + P(B) = 0.4 + 0,5 = 0,9$.

2eme cas : $A\cap B \neq \phi$

. si $A \subseteq B$ $\quad P(A\cap B) = P(A) = 0.4$.

$P(A\cup B) = 0.4 + 0,5 - 0.4 = 0.5$.

si $A \not\subset B$ $\quad A\cap B \subset A \Rightarrow P(A\cap B) < P(A) = 0.4$.

alors $P(A\cup B) \geq P(B) = 0.5$

Donc

$$0.5 \leq P(A\cup B) \leq 0.9$$
$$0 \leq P(A\cap B) \leq 0.4.$$

valeurs minimals

valeurs maximals.

Exercice 3

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.5$.

a_ A et B sont incompatibles

$\Rightarrow A\cap B = \emptyset$ donc $P(A\cap B) = 0$ alors $P(A\cup B) = 0.5 + 0.5 = 1$

b_ $P(A\cap B) = 0.5$ $\quad P(A\cup B) = 0.5 + 0.5 - 0.5 = 0.5$.

Exercice 4

a_ Parce que $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$, les événements A et B ne sont pas incompatibles, car $P(A\cup B) \neq P(A) + P(B)$

b_ Comme $P(A) > P(B)$ il est possible que l'événement B soit inclus dans l'événement A, donc B peut impliquer A, mais il est impossible que A implique B.

Exercice 5

a_ Parce que $D_1 = A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap\overline{B\cup C}$ on trouve $D_1\cap D_2 = \emptyset$ et par suite $P(D_1\cap D_2) = 0$

b_ Parce que $P(D_1\cap D_2) = 0$, on trouve

$$P(\overline{D_1}\cap\overline{D_2}) = P(\overline{D_1\cup D_2})$$
$$= 1 - P(D_1\cup D_2)$$
$$= 1 - (P(D_1) + P(D_2))$$
$$= 1 - (0.2 + 0.4) = 0.4$$

Exercice 6 /

3/20

pour tout $i \in [1, n]$, on note $p_i = P(\{w_i\})$

Pour que P définisse bien une probabilité, il faut et il suffit que les nombres réels p_i soient positifs et vérifient $p_1 + \cdots + p_n = 1$

Pour que les nombres p_i soient positifs, il faut et il suffit que la constante C soit positive.

Pour que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, il faut et il suffit que :

$$(C\times 1) + (C\times 2) + \cdots + (C\times n) = 1$$

c'est-à-dire que $C(1+2+\cdots+n) = 1$

$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (cette formule, qu'il faut connaître se démontre simplement par récurrence sur n), donc il faut et il suffit que $C = \frac{n(n+1)}{2}$ pour que P définisse une probabilité.

Exercice 7 /

a) $P(A\cap B^c) = P(A\cap(\Omega - B))$
$= P((A\cap\Omega) - P(A\cap B)$
$= P(A) - P(A)P(B)$
$= P(A)(1 - P(B)) = \cancel{P(A)}\ P(A$
$= P(A) \times P(\bar{B})$

b) $P((A\cap\bar{B})\cap C) = P(A\cap\bar{B}\cap C)$
$= P(A)P(\bar{B})P(C)$
$= P(A\cap\bar{B})P(C)$.

Exercice 8.

on a : $P(\Omega) = 1$
$= P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) + P(\{w_4\})$
$P(\{w_5\}) + P(\{w_6\})$.

a- $P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = 0{,}25$ et $P(\{w_3\}) = 3P(\{w_4\})$.

$1 = 2\times 0.25 + 4\,P(\{w_4\})$, ~~donc~~ il vient :

$$P(\{w_4\}) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad P(\{w_3\}) = \frac{3}{8}.$$

b – $P(\{w_1, w_3\}) = P(\{w_1\}) + P(\{w_3\}) = 0.2$ (1)

– $P(\{w_2, w_3\}) = P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) = 0.6$ (2)

– $P(\{w_1\}) = 0.2.$ (3)

– $P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) + P(\{w_4\}) = 1$ (4)

(4) nous donne : $0.2 + 0.6 + P(\{w_4\}) = 1$. il vient :

$$P(\{w_4\}) = 0.2$$

(1) nous donne : $P(\{w_3\}) = 0.2 - 0.2 = 0$

(2) $\Rightarrow P(\{w_2\}) = 0.6.$

Exercice 9

P est une probabilité, donc

on note $p_i = P(\{w_i\})$ pour $i = 1, \dots, 4$. les p_i sont des réels positifs qui vérifient $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

D'autre part, on a :

- $P(\{w_1, w_2, w_3\}) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) = 9/10 = 0.9$
- $P(\{w_1, w_2\}) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) = 7/10 = 0.7$
- $P(\{w_1, w_3\}) = P(\{w_1\}) + P(\{w_3\}) = 7/10 = 0.7$

On obtient ainsi un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0.9 \\ p_1 + p_2 = 0.7 \\ p_1 + p_3 = 0.7 \end{cases}$$

dont la résolution nous donne : $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = p_3 = \frac{1}{5}$; $p_4 = \frac{1}{10}$

Exercice : 10

- $\Omega = \{(P,P),(P,f),(f,P),(f,f)\}$
- $A = \{(P,f);(f,P)\}$ et $B = \{(P,P),(P,f)\}$
- $\overline{A} = \{(P,P),(f,f)\}$ = « on obtient le même résultat »
- $\overline{B} = \{(f,P);(f,f)\}$ = « on a obtenu face au premier lancé »

- $A \cap B = \{(P,f)\}$
- $A \cup B = \{(P,P),(P,f),(f,f)\}$.

L'hypothèse d'equiprobabilité est vérifiée dans le cas de cette expérience aléatoires car la pièce n'est pas truquée, et on peut donc utiliser la formule avec les cardinaux pour calculer les probabilités demandées :

- $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$
- $P(B) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

on retrouve bien le même résultat avec un calcul direct,

$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Exercice : 11

a- La probabilité que parmi les 2 boules pigées, l'une soit rouge et l'autre jaune est :

$$\frac{C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{3\times 4}{45} = \frac{4}{15}$$

b- Calculons la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire obtenir moins de 7 points. Les deux boules sont donc rouges et alors $q = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ et $p = 1 - q = \frac{14}{15}$ est la probabilité cherchée.

c- On cherche la probabilité que parmi les deux boules, l'une soit rouge et l'autre blanche ou bien, une soit jaune et l'autre blanche, donc

$$\frac{C_3^1 C_1^2}{C_{10}^2} + \frac{C_4^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$$

Exercice : 12

le nombre de cas possible est $10!$

le nombre de cas favorables est $9\times 8!$. En effet, la boule numérotée 4 peut occuper n'importe quelle des 9 premières places, tout en étant suivie par la boule numérotée 5. Il y a donc 9 façons de placer les boules 4 et 5 l'une après l'autre. Les 8 autres boules peuvent être placées sur les 8 places laissées disponible de $8!$ façons différentes. Par suite chaque cas d'arrangement des boules 4 et 5 doit être associé avec les $8!$ cas possibles d'arrangements des 8 autres boules, et au total il y a $9\times 8!$ façons différentes de placer les 10 boules sous la condition que la boule 4 soit suivie par la boule 5.

La probabilité cherchée est donc $p = 9\times 8!/10! = 1/10$.

Exercice (13)

Dans ce problème, il est plus de calculer la probabilité de l'événement contraire. Cherchons donc la probabilité q qu'en lançant n fois deux dés le double six n'apparaisse jamais.

Le nombre de cas possibles est $(36)^n$. En effet, à chaque lancer de deux dés il y a 36 cas possibles, car chacune des 6 faces du premier dé peut être combinée avec n'importe laquelle des six faces du deuxième dé, donc au total $6 \times 6 = 36$. Pour les n lancers des deux dé il y a donc $(36)^n$ cas différents possibles.

le nombre de cas favorables est $(35)^n$. En effet, à chaque lancer de deux dé il y a 35 cas favorables (de 36 cas possibles il faut éliminer le cas où la face 6 apparaît sur les deux dés). Pour les n lancers il y a donc $(35)^n$ cas favorables

Donc $q = \left(\frac{35}{36}\right)^n$ et par conséquent, la probabilité cherchée est

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

ercice : 14 8/20

Il ya $\alpha+\beta$ cas possibles et α cas favorables pour extraire une boule blanche, donc $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; la probabilité d'extraire une boule noire est $q = 1-p = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Exercice : 15

a- le nbr de cas possibles est $6\times13=78$. En effet, pour la sélection de la première boule il ya 6 possibilités (le nombre de boules blanches dans l'urne) et pour la sélection de la deuxième boule il ya 13 possibilités (le nbr de boules restant dans l'urne).

le nbr de cas favorables est $6\times5=30$, car pour la première sélection il ya 6 cas favorables tandis que pour la deuxième 5 cas sont favorables (avant la deuxième sélection il ya dans l'urne 5 boules blanches). Par conséquent, la probabilité que la deuxième boule pigée soit blanche, sachant que la première boule pigée est blanche est $p = 30/78 = 15/13$.

Pour que la deuxième boule sélectionnée soit noire, sachant que la première boule extraite est blanche, il ya 78 cas possibles et $6\times8=48$ cas favorables, donc $q = 48/78 = 8/13$. On peut obtenir directement q, car $q = 1-p$

b- le nbr de cas possibles est $14\times13=182$, car il ya 14 cas possibles pour le choix de la première boule et chaque cas doit être combiné avec les 13 cas possibles lors du choix de la seconde boule, donc $14\times13 = 182$ cas possibles.

le nombre de cas favorables est $30+40=78$. En effet, si on suppose d'abord que la première pigée est blanche, alors il ya 6 cas favorables pour ~~que~~ le choix de la première boule et 5 cas

pour la deuxième boule, donc $6 \times 5 = 30$ cas favorables.
Si on suppose maintenant que la première boule pigée est noire, alors il y a 8 cas favorables pour le choix de la première boule et 6 cas pour la deuxième boule, donc $8 \times 6 = 48$ cas favorables dans ce dernier cas. Au total il y a $30 + 48 = 78$ cas favorables et par conséquent, la probabilité que la deuxième boule pigée soit blanche est $p^1 = 78/182 = 3/7$. Pour la probabilité de l'événement que la deuxième boule soit noire, sans connaître la couleur de la première boule, un raisonnement analogue donne $q^1 = 52/91 = 4/7$ ou directement $q^1 = 1 - p^1$.

Exercice : 16
On choisit au hasard une carte d'une série de 18 cartes numérotées de 1 à 18.
Quelle est la probabilité que le numéro soit multiple de 3 ou de 7 ?

- Réponse : Considérons les événements.
A - " le numéro est un multiple de 3 "
B - " le numéro est un multiple de 7 "

On cherche la probabilité $P(A \cup B)$. Parce que $A \cap B = \emptyset$, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Exercice : 17

a) $\frac{C_8^3}{C_{20}^3}$, b) $\frac{C_3^3}{C_{20}^3}$, c) $\frac{C_8^2 C_3^1}{C_{20}^3}$, d) $\frac{C_3^1 C_{17}^2}{C_{20}^3}$, e) $\frac{C_8^1 C_3^1 C_9^1}{C_{20}^3}$ $\frac{10}{20}$

Exercice : 18

a = $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$; b) $3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$, c) $\frac{4}{9}$, d) $\frac{1}{2}$.

Exercice : 19

la première solution est plus probable.

Exercice : 20

- Soit d'abord $P(B|A) = P(B|\bar{A})$. Alors

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Rappel
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

$$= \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$$

$$= \frac{P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)}{P(A)+P(\bar{A})} = \frac{P(B)}{1} = P(B)$$

Donc les événements A et B sont indépendants. On a utilisé ici la propriété des fractions, à savoir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

- supposons maintenant que les événements A et B indépendants, donc $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$. Alors on a aussi $P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A})\,P(B)$, et par suite

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$$

Exercice : 21

- De $P(B) = P(B\cap\Omega) = P(B\cap(A\cup\bar{A})) = P(B\cap A) + P(B\cap\bar{A})$ on trouve $P(B\cap\bar{A}) = P(B) - P(B\cap A) = 0.40 - 0.15 = 0,25$

- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,40} = \frac{3}{8}$

- $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,30} = \frac{1}{2}$

- $P(A|A\cup B) = \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cap B)} = \cancel{A} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} = \frac{0,30}{0,30+0,40-0,15} = \frac{6}{11}$

- $P(B|A\cap B) = \frac{P(B\cap A\cap B)}{P(B)} = 1$

- $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,25}{0.70} = \frac{5}{14}$

- $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,40} = \frac{5}{8}$

- $P(\bar{B}|B) = \frac{P(\bar{B}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\phi)}{P(B)} = 0$

Exercice : 22

a- $P(A\cap B \mid B) = \dfrac{P(A\cap B\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,10}{0,30} = \dfrac{1}{3}$

b- $P(A\cap B \mid A\cup B) = \dfrac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}$. Parceque $A\cap B \subseteq A\cup B$, il s'ensuit que $P(A\cap B / A\cup B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} = \dfrac{0,10}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} = \dfrac{0,10}{0,45} = \dfrac{2}{9}$

c- $P(\overline{(A\cup B)} \mid B) = \dfrac{P(\bar A\cap \bar B\cap B)}{P(B)} = 0$

Exercice : 23

a- De $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$, on trouve $P(B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$

b- De $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A)\,P(B)$

on trouve $P(B) = \dfrac{P(A\cup B)-P(A)}{P(\bar A)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$

c- De $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)\,P(B/A)$, on trouve

$P(B) = 0,7-0,5+0,5\times 0,5 = 0,45$

Exercice : 24

Soient A_1 A_2 et A_3 les événements que le premier, le deuxième et le troisième canon atteigne la cible respectivement. On cherche la probabilité de l'événement $A_1\cup A_2\cup A_3$. Les événements A_k, $k=1,2,3$ sont indépendants et compatibles, donc.

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-\\ &\quad -P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)\\ &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)\,P(A_2)-P(A_1)\,P(A_3)\\ &\quad -P(A_2)\,P(A_3)+P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\\ &= 0,6+0,8+0,7-0,6\times 0,8-0,6\times 0,7-0,8\times 0,7+0,6\times 0,8\times 0,7\\ &= 0,976\end{aligned}$$

Aussi on trouve directement

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= 1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\ &= 1-P(\bar A_1\cap \bar A_2\cap \bar A_3) = 1-0,4\times 0,2\times 0,3\\ &= 1-0,024 = 0,976\end{aligned}$$

Exercice : 25

Il est plus facile de trouver la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité que le lot soit accepté après avoir passé par le contrôle de la qualité. Notons A_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ pièce contrôlée est acceptable", $i=1,\ldots,5$. On doit calculer la probabilité de l'événement $\bigcap_{i=1}^{5} A_i$. Parce que les événements A_i, $i=1,\ldots,5$ ne sont pas indépendants, on doit utiliser la formule

$$q = P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1\cap A_2)\,P(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3)\,P(A_5/A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4).$$

Dans notre cas $P(A_1)=\frac{95}{100}$, $P(A_2/A_1)=\frac{94}{99}$, car si l'événement A_1 se réalise, alors dans le lot il reste encore 99 pièces parmi lesquelles 94 sont correctes $P(A_3/A_1\cap A_2)=\frac{93}{98}$, $P(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3)=\frac{92}{97}$ et $P(A_5/A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=\frac{91}{96}$, donc

$$q = \frac{95}{100}\times\frac{94}{99}\times\frac{93}{98}\times\frac{92}{97}\times\frac{91}{96} = 0{,}77.$$

d'où $p = 1-q = 0{,}23$

Exercice : 26

Soit A_1 et A_2 les événements "le premier (respectivement le second) tireur atteint la cible"; les événements A_1 et A_2 sont indépendants. On cherche

$$P(A_1 - A_2) = P(A_1\cap\overline{A_2}) = P(A_1).P(\overline{A_2}) = 0.7\times 0.4 = 0{,}28$$

Exercice : (27)

Soit A l'événement "le premier coté est blanc" et B l'événement "le second coté du même disque est également blanc". On doit calculer la probabilité conditionnelle $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Parce que $P(A) = \frac{1}{2}$ (car il y a 6 faces parmi lesquelles 3 sont blanches) et $P(A\cap B) = \frac{1}{3}$ (car il y a 3 disques parmi lesquels seulement un a les deux côtés blancs), il s'ensuit que $P(B/A) = \frac{2}{3}$.

Exercice (28)

Pour les inconnues $P(A)$ et $P(B)$ on peut obtenir un système de deux équations linéaires en considérant les relations :

$$P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$
$$P(A).P(\overline{B}/A) = P(\overline{B})P(A/\overline{B})$$

En utilisant les relations $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ et $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$ le système précédent devient

$$P(B/A)P(A) - P(A/B)P(B) = 0$$
$$(1 - P(B/A))P(A) + P(A/\overline{B})P(B) = P(A/\overline{A})$$

Dans notre cas, on a :

$$\frac{3}{5}P(A) - \frac{2}{5}P(B) = 0$$
$$\frac{2}{5}P(A) + \frac{1}{10}P(B) = \frac{1}{10}$$

d'où $P(A) = \frac{2}{11}$ et $P(B) = \frac{3}{11}$

Exercice : 29 $\frac{15}{20}$

Soit A_j l'événement " l'étudiant j est diplômé ". Les événements A_j, $1 \leq j \leq 5$ sont indépendants, et $P(A_j) = 0,4$; $1 \leq j \leq 5$.

a- $P\left(\bigcap_{j=1}^{5} \overline{A_j}\right) = \prod_{i=1}^{5} P(\overline{A_j}) = (0,6)^5 = 0,077$

b- $C_5^1 (0,4) \times (0,6)^4 = 0,259$

c- $C_5^2 (0,4)^2 \times (0,6)^2 = 0,345$

d- $C_5^2 (0,4)^2 \times (0,6)^3 + C_5^2 (0,4)^3 \times (0,6)^2 + C_5^4 (0,4)^4 \times 0,6 + C_5^3 (0,4)^5 = 0,663$

e- $P\left(\bigcap_{j=1}^{5} A_j\right) = \prod_{j=1}^{5} P(A_j) = (0,4)^5 = 0,010.$

~~Exercice 30~~

~~soit A_1, A_2 et A_3 les événements que le premier, le deuxième et respectivement le troisième~~

Exercice : 30

Soit A l'événement " la cible est touchée exactement une fois "

et A_1, A_2, A_3 les événements " la cible est touchée par le premier, le deuxième et le troisième tireur " respectivement. Alors

$A = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$

donc A est la réunion de 3 événements incompatibles et par suite,

$P(A) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3).$

Parce que les événements $A_i, \overline{A_j}, \overline{A_k}$ sont indépendants, $i \neq j \neq k$

$i, j, k = 1, 2, 3$ il s'en suit que :

$P(A) = P(A_1) P(\overline{A_2}) P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) P(A_2) P(\overline{A_3})$

$+ P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) P(A_3).$

$P(A) = P_1(1-P_2)(1-P_3)+(1-P_1)P_2(1-P_3)+(1-P_1)(1-P_2)P_3$

$= 0{,}4\times 0{,}5\times 0{,}3 + 0{,}6\times 0{,}5\times 0{,}3 + 0{,}6\times 0{,}5\times 0{,}7$

$= 0{,}36$

16/20

Exercice ! 31

Soit B_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ boule pigée est blanche", $i=1,2$ et soit A_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ boule pigée est noire", $i=1,2$.

a- On cherche d'abord la probabilité conditionnelle $P(B_2|B_1)$. Donc.

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1\cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{6}{14}\times\frac{5}{13}}{\frac{6}{14}} = \frac{5}{13}$$

- On cherche la probabilité $P(A_2|B_1)$. Donc

$$P(A_2|B_1) = \frac{P(B_1\cap A_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{6}{14}\times\frac{8}{13}}{\frac{6}{14}} = \frac{8}{13}$$

On peut obtenir directement $P(A_2|B_1)$, car $P(A_2|B_1)+P(B_2|B_1)=1$

b- Notons que $\overline{B_1}$ est l'événement "la première boule pigée est noire", et que $\{B_1, \overline{B_1}\}$ est un système complet d'événements. En utilisant la formule de la probabilité totale, on obtient

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1)+P(B_2|\overline{B_1})\,P(\overline{B_1}).$$
$$= \frac{5}{13}\times\frac{6}{14}+\frac{6}{13}\times\frac{8}{14} = \frac{3}{7}$$

Comme $\overline{B_1}=A_1$, en procédant comme avant, on trouve

$$P(B_2) = P(A_2|B_1)\,P(B_1)+P(A_2|\overline{B_1})\,P(\overline{B_1})$$
$$= P(A_2|B_1)\,P(B_1)+P(A_2|A_1)\,P(A_1)$$
$$= \frac{8}{13}\times\frac{6}{14}+\frac{7}{13}\times\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Exercice : 32 $\frac{17}{20}$

- $P(C_1) = \dfrac{100+1200}{1200+350+150+100+25+10} = 0,708 = \dfrac{1300}{1835}$

- $P(C_2) = \dfrac{25+350}{1835} = 0,204$

- $P(C_3) = \dfrac{10+150}{1835} = 0,088$

- $P(I/C_1) = \dfrac{100}{1300} = 0,08$

- $P(I/C_2) = \dfrac{25}{25+350} = \dfrac{25}{375} = 0,07$

- $P(I/C_3) = \dfrac{10}{150+10} = 0,06$

- $P(C_1/I) = \dfrac{100}{100+25+10} = 0,74$

- $P(C_2/I) = \dfrac{25}{100+25+10} = 0,19$

- $P(C_3/I) = \dfrac{10}{100+25+10} = 0,07$

$P(I) = \dfrac{100+25+10}{1835} = 0,073$

$P(C_1 \cap I) = \dfrac{100}{1835} = 0,054$; $P(C_1)P(I) = 0,708 \times 0,073 = 0,052$

$P(C_2 \cap I) = \dfrac{25}{1835} = 0,014$; $P(C_2)P(I) = 0,204 \times 0,073 = 0,015$.

$P(C_3 \cap I) = \dfrac{10}{1835} = 0,005$; $P(C_3)P(I) = 0,088 \times 0,073 = 0,006$

Nous constatons que $P(C_i \cap I) \neq P(C_i)P(I)$, Par conséquent il y a dépendance entre le volume d'affaire et l'existence des impayés

Exercice : 34

18/20

Représentons par A l'événement "la boule extraite de l'urne U_2 est blanche". Cet événement peut être réalisé par deux événements incompatibles, où :

- A_1 signifie "la boule transférée de l'urne U_1 est blanche et est suivie par la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2".
- A_2 signifie "la boule transférée de l'urne U_1 est noire et est suivie par la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2".

On a $A = A_1 \cup A_2$ et donc $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$, car $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

or $$P(A_1) = \frac{a}{a+b} \frac{c+1}{c+d+1}$$

Car l'événement A_1 consiste en la réalisation de deux événements à savoir : B_1 le choix d'une boule blanche de l'urne U_1 (avec la probabilité $P(B_1) = \frac{a}{a+b}$) que l'on introduit dans l'urne A_2 et B_2 la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2 (probabilité $P(B_2|B_1) = \frac{c+1}{c+d+1}$). $P(A_1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1) \cdot P(B_1)$.

De façon analogue, $$P(A_2) = \frac{b}{a+b} \frac{c}{c+d+1}$$

d'où
$$P(A) = \frac{a(c+1)}{(a+b)(c+d+1)} + \frac{bc}{(a+b)(c+d+1)}$$
$$= \frac{ac+bc+a}{(a+b)(c+d+1)}$$

Exercice : 35

On applique la formule des probabilités totales. Soit B l'événement "la boule pigée est blanche" et A_k l'événement "la sélection provient de l'urne U_k", $k = 1, 2, 3$, alors $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$ et par suite

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

Exercice : 36

On applique la formule de Bayes. Soit B l'événement "la boule pigée de l'urne U_2 est blanche" et A_1 (respectivement A_2) l'événement "la boule transférée de l'urne U_1 à l'urne U_2 est blanche (respectivement noire)", alors

$$P(A_1) = \frac{2}{3}, \quad P(A_2) = \frac{1}{3}.$$
$$P(B/A_1) = \frac{2}{7} \quad P(B/A_2) = \frac{1}{7}.$$

d'où
$$P(A_2/B) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{5}$$

~~Notons par la probabilité ... l'événement A_2 ...~~

Exercice : on applique la formule de Bayes. Soit :

A – "l'objet est fabriqué par la machine M_1"

B – "l'objet est fabriqué par la machine M_2"

D – "l'objet est défectueux"

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B)}$$

et $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(B/A) = \frac{5}{100}$, $P(D/B) = \frac{6}{100}$

d'où $P(A/D) = \frac{5}{17}$.

-xercice : 37

20/20

...u applique la formule de Bayes, Soit :

... - " l'objet est fabriqué par la machine M_1 "

B - " l'objet est fabriqué par la machine M_2 "

D - " l'objet est defectueux "

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B)}$$

et $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(D/A) = \frac{5}{100}$, $P(D/B) = \frac{6}{100}$.

d'où $P(A|D) = \frac{5}{17}$.